囲碁における段級位決定について

1　はじめに

多数のプレイヤーの勝敗結果を元に個々のプレイヤーの強さを数値化する、いわゆるレーティング (rating) は、チェスを中心に議論され、さまざまな理論が知られている。将棋においてもチェスと同様の理論が使われているようである。

ところで囲碁においては、下手がハンデとしてゲーム開始時にいくつかの石を予め置くこと (置石) によって、棋力の差を埋めて互角にゲームを楽しむことが出来る。また、段級位は置石の数によって、例えば置石 4 つで互角ならば級 (段) の差は 4、とすることが習慣となっている。囲碁のレーティングは、この置石による考え方と整合性を持って行われることが望ましい。

2　棋力と置石について

2.1　コミ

囲碁では、黒と白の陣地の大きさと捕獲した石 (あげ浜と言う) の合計の大小で勝敗を決める。一般に黒から先に打つが、先着した方が有利なため、それを何らかの方法で解消する必要がある。

江戸時代には、黒白を交互に持って複数局を打つのが一般的であった (互先 (たがいせん) と呼ぶ)。ところが、これだと複数局を打つ必要があり、多くのプロの棋士が競技としてトーナメント等を行うには不都合である。そこで、「コミ」と呼ばれるハンデを導入することが広く行われるようになった。具体的には、後から打つ白のスコアにある数値を加え、それで大小を比べるというものである。その数値は、黒と白が互角になるように経験的に決定される。

日本においては、当初 4.5 目とされ、1949 年制定の日本囲碁規約でも 4.5 目とされた。5.5 目に最初に移行したのは 1955 年の王座戦で、その後他の棋戦も順次 5.5 目に移行した。2002 年 9 月に、6.5 目への移行が決定された。

なお、0.5 の端数は、引き分けを無くすために導入されているものである。

2.2　置石と段級位

碁における強さは、級と段という単位で呼ばれるのが習慣となっている。例えば入門を 20 級とし、順に 19 級〜1 級、その上は初段 (1 段)、2 段、という具合である (0 級または 0 段は無いことに注意)。

ここで、級 (または段) の差が置石の差に対応するとされている。すなわち、7 級と 3 級では、7 級側が 4 つの置石をすることによって、互角に打てるということである。

置石をする碁 (置碁と言う) では、下手が黒を持ち、黒石をいくつか置いて、白から打ち始める。級の差によって、次の表のように打つことが多い。(引き分けを避けるならコミに +0.5 する。)

級の差	置石の数	コミ
0	0	6
1	0	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0

ところが、この方式は矛盾があり、あまり正確でないことが知られている。なぜなら、級の差が 1 増える毎に置石が 1 増えるシステムであるが、「級の差 0 →級の差 1」の箇所だけは、「置石が半分」しか増えていないからである。級の差 −1 と級の差 1 では、白黒が入れ替わるので、この差がちょうど 1 子に対応する。すなわち、互先とコミ無し碁では半子の差しかない。

コミが 6 目と言うことは、万能の神が双方最善で碁を打てば黒が 6 目勝つと推定されるということである。このとき、黒が初手をパスすれば双方最善で当然白が 6 目勝つことになり、すなわち黒の初手の価値は 12 目ということが分かる。1 子の置石の価値を 12 目とし、「12 目分の力の差 = 1 級差」と定義すると、この表は次のように修正できる。

級の差	置石の数	コミ
0	0	6
0.5	0	0
1	0	−6
1.5	2	0
2	2	−6
2.5	3	0
3	3	−6
3.5	4	0
4	4	−6

2.3 よく用いられる段級位決定法

碁会所等でよく用いられる方法は、次のようなものである。

- 各人の段級位を仮決定する。
- 各人の段級位の差から、上の 2 つのような表に従って置石、コミを決定し、その条件で対局を行う。
- 勝ちが大きく累積すれば昇級 (昇段)、負けが大きく累積すれば降級 (降段)。

実力差に応じて置石するため、全員の段級位が適正ならば全員の勝率は 5 割になるはずであり、大きく勝ち越す (あるいは負け越す) ならば適正な段級位で無いと見做して修正を行う。このシステムに従って十分多くの対局を行えば、いずれ適正な段級位に落ち着く。

この方法の大きな問題点は、初期段級位の決定の難しさである。実際の棋力とかけ離れた初期値からスタートした場合、落ち着くのに非常に時間がかかり、また落ち着くまでは他の参加者の段級位も影響を受けて狂ってしまう。

また、現在の段級位差と異なる置石の対局を、レーティングの対象に含めるのが難しいという問題点もある。従って、参加者は自分の強さを知るために特定のハンデで打つことを強いられることになる。

3 勝敗の確率モデルとレート計算

3.1 はじめに

本章では、勝敗の確率モデルに基づいたレート計算の方法を説明する。

3.2 勝敗の確率モデル

A 氏の棋力 x_A、B 氏の棋力を x_B としたとき、両者がハンデ h で対局したとき A 氏が勝つ確率は、

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-k(x_A - x_B + h))}$$

に従うものと仮定する。

h はハンデを置石に換算したものであり、例えば、A 氏が黒ならば、

$$h = \frac{6 - \text{コミ}}{12} + \text{置石数}$$

B 氏が黒ならば、

$$h = \frac{\text{コミ} - 6}{12} - \text{置石数}$$

のような値である。

勝敗は両者の棋力差にハンデを加味したものに対して、何らかの偶発的要因により (正または負の) ハンデが加わってその正負で決定されるものと仮定する。その偶発的ハンデの大きさが 0 を中心とした正規分布に従っていると仮定すると、勝率はそれを積分した確率分布関数に従うことになる。上の式は、正規分布の積分の良い近似として広く使われているものである。

この式の k の値は棋力差あるいは置石の差が勝率に与える影響の大きさを表し、上の偶発的ハンデの大きさから決まる。

なお、ネット碁会所の一つである KGS (`http://kgs.kiseido.com/`) ではレート計算にこれと同様のモデルが用いている。KGS では、$k = 0.8$ としている。

関数

$$\frac{1}{1 + \exp(-kx)}$$

の概形を図 1 に示す ($k = 0.8$)。相手との棋力差が無ければ勝つ確率は 0.5、相手より強ければ 1 に近付き、弱ければ 0 に近付く。

3.3 レート計算

多くのプレイヤーの相互対局の結果を元に、段級位を以下のようにして推定することが出来る。

プレイヤー 1〜 プレイヤー n がいて、その相互対局 (全 M 局) の結果が以下のように与えられているものとする。

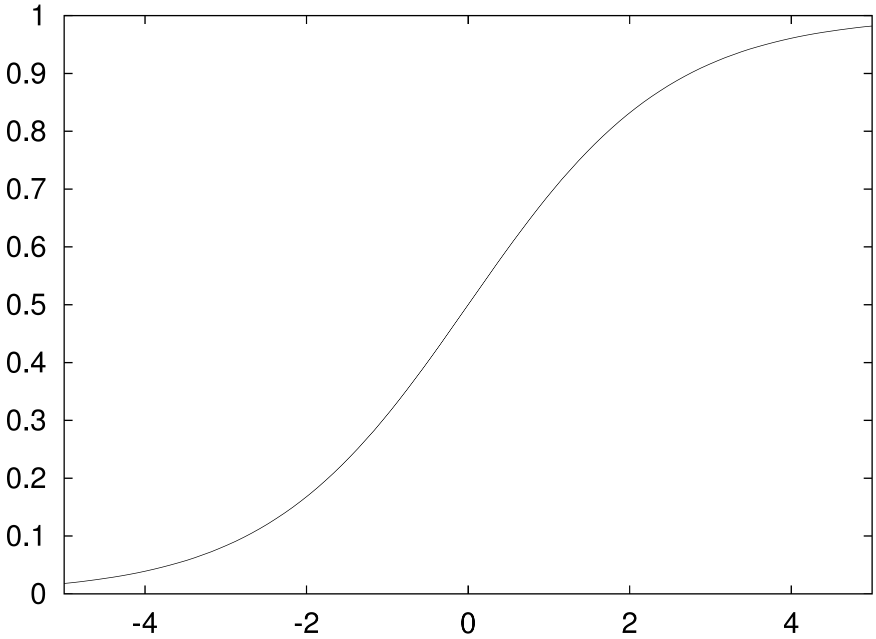

図 1: 確率モデル関数の概形

$$
\begin{array}{lcl}
a_i & : & i\text{ 番目の対局の勝者のプレイヤー番号} \\
b_i & : & i\text{ 番目の対局の敗者のプレイヤー番号} \\
h_i & : & i\text{ 番目の対局のハンデ}
\end{array}
$$

このとき、プレイヤー i の (推定) 段級位を x_i とすると、そのような結果の生じる確率は、

$$
P = \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{1 + \exp(-k(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i))}
$$

で与えられる。この P を $x_1, \cdots, x_n$ の n 変数関数と見て、その値を最大化するような $x_1, \cdots, x_n$ を棋力の推定値とする。

計算のしやすさから、実際には、

$$
-\log P = \sum_{i=1}^{M} \log(1 + \exp(-k(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i)))
$$

を最小化する問題として計算する。

3.4 アンカーと計算対象プレイヤーの抽出

ここで問題となるのが、段級位の基準の問題である。段級位の絶対値に関する何らかの基準が無いと段級位を決定できないのは自明である。前節の最小化問題で言うと、例えばすべての x_i を +1 したとしても値が変わらないので、このままでは最適点が存在せず、何らかの条件を加えなければならない。

そこで、アンカーと呼ばれる、棋力が分かっているプレイヤーを何人か決めて、それを基準とする必要がある。アンカーの x_i を定数に固定してしまってもいいが、例えば、3 段のアンカーを指定するとき、そのプレイヤーと 3 段の仮想プレイヤーが 10 勝 10 敗だった、という対局データを付け加えるという方法も考えられる。これだと、複数のアンカーを用いた場合のアンカーの基準としての信頼度を変化させることができる。

また、全く対局していない人、負けたことが無い人、勝ったことが無い人がいる場合は、最適点が存在しなくなるので、そのような人を計算対象から除外する必要がある。例えば負けたことの無い人は、強さの上限が分からない。最小化問題で言うと、強さを大きくすればするほど目的関数が小さくなるので、計算値が無限大に発散してしまう。

更に、勝ちも負けもあるが、アンカーと直接または間接的にも対局したことが無い人がいると、やはり計算不能になってしまう。例えば、アンカーでない A 氏と B 氏が互いに多く対局して勝ったり負けたりしているが、それ以外の人と全く打っていないような場合である。このとき、A 氏と B 氏の棋力に +1 しても全く目的関数の値が変わらないので、両者の棋力は決定不能になる。

そこで、計算対象とできるプレイヤーを、以下のように抽出する。

- アンカーは集合 W および集合 L に属する。
- $x \in W$ かつ y が x に勝ったことがあれば、$y \in W$。
- $x \in L$ かつ y が x に負けたことがあれば、$y \in L$。
- 計算対象プレイヤーは、$W \cap L$ とする。

W はアンカーに直接または間接的に勝ったことのあるプレイヤーの集合、L はアンカーに直接または間接的に負けたことのあるプレイヤーの集合である。両者の共通集合、すなわち (間接的にでも) アンカーに勝ったことも負けたこともあるプレイヤーを計算対象とする。

3.5　例

本方法の理解の助けになるよう、小さな例をいくつか示す。以下、$k = 0.8$ とする。

3.5.1　例 1

A 氏が 1d のアンカーに互先で 1 勝 1 敗だった場合を考える。このとき、A 氏の棋力を x とすると目的関数は

$$-\log P = \log(1 + \exp(-k(x-1))) + \log(1 + \exp(-k(1-x)))$$

となる。この関数は、図 2 のような形しており、$x = 1$ で最小となることが分かる。

3.5.2　例 2

A 氏が 1d のアンカーに互先で勝ち、3d のアンカーに互先で負けた場合を考える。このとき、A 氏の棋力を x とすると目的関数は

$$-\log P = \log(1 + \exp(-k(x-1))) + \log(1 + \exp(-k(3-x)))$$

となる。この関数は、図 3 のような形しており、$x = 2$ で最小となることが分かる。

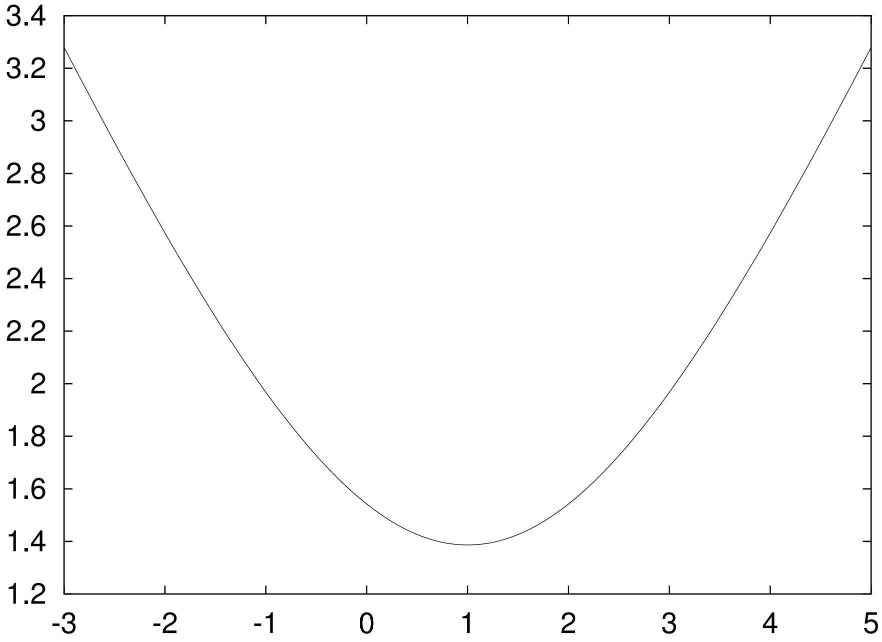
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

図 2: 例 1

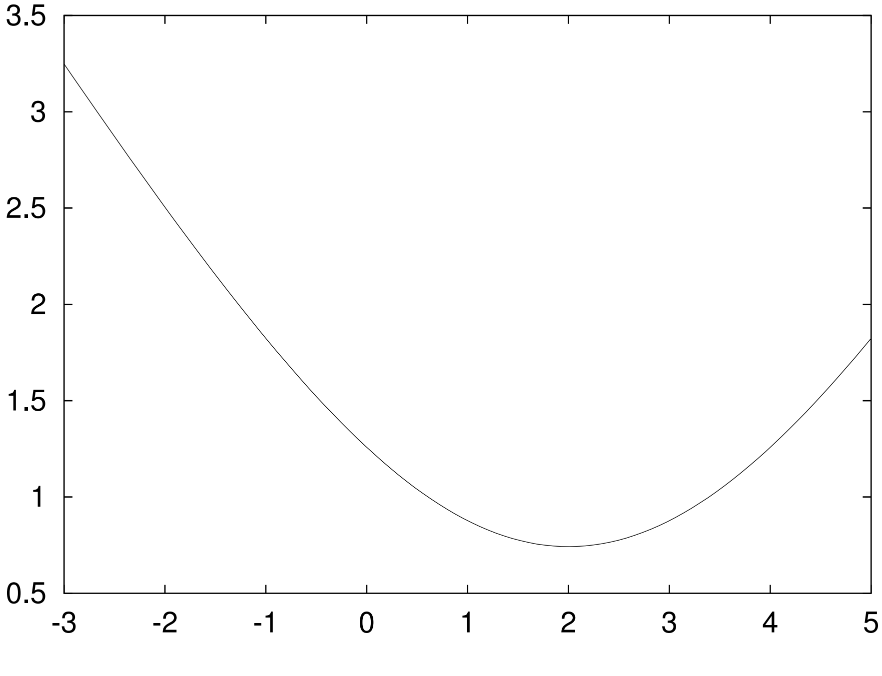
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

図 3: 例 2

3.5.3　例 3

今度は、A 氏が 1d のアンカーに互先で 3 勝 1 敗だった場合を考える。このとき、A 氏の棋力を x とすると目的関数は

$$-\log P = 3\log(1+\exp(-k(x-1))) + \log(1+\exp(-k(1-x)))$$

となる。この関数は、図 4 のような形になる。この場合は確率モデルが効いてきて、$k=0.8$ なら

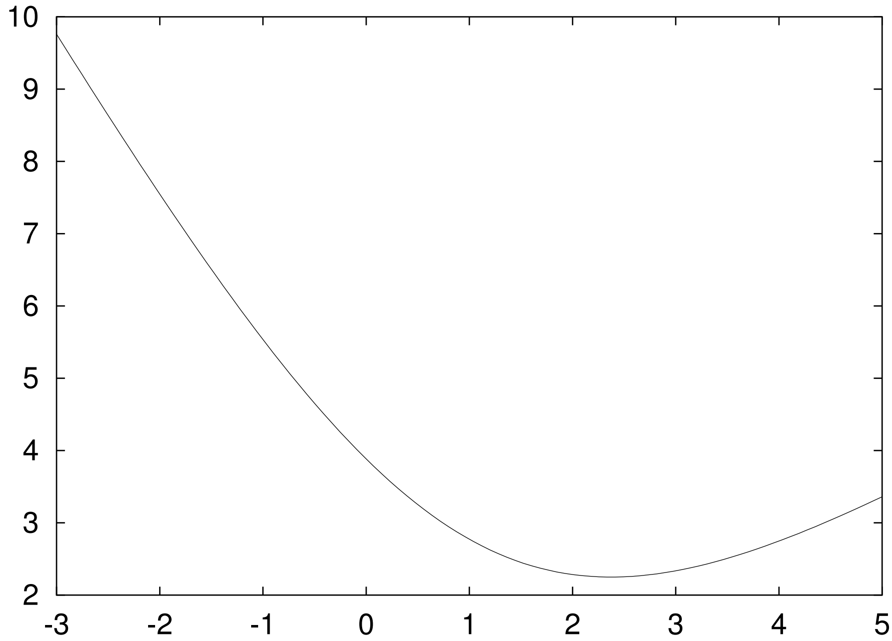

図 4: 例 3

ば $x \simeq 2.37$ で最小となる。

3.5.4　例 4

A 氏が 1d のアンカーに 2 子置かせて 1 勝 1 敗、B 氏は A 氏と互先で 1 勝 1 敗とする。それぞれの棋力を x、y とすると目的関数は、

$$\begin{aligned} -\log P &= \log(1+\exp(-k(x-1-1.5))) + \log(1+\exp(-k(1-x+1.5))) \\ &+ \log(1+\exp(-k(x-y))) + \log(1+\exp(-k(y-x))) \end{aligned}$$

となる。この関数は、図 5 のような形になる。この関数は $x=y=2.5$ で最小となる。B 氏はアンカーと対局していないが間接的に棋力が推定できていることが分かる。

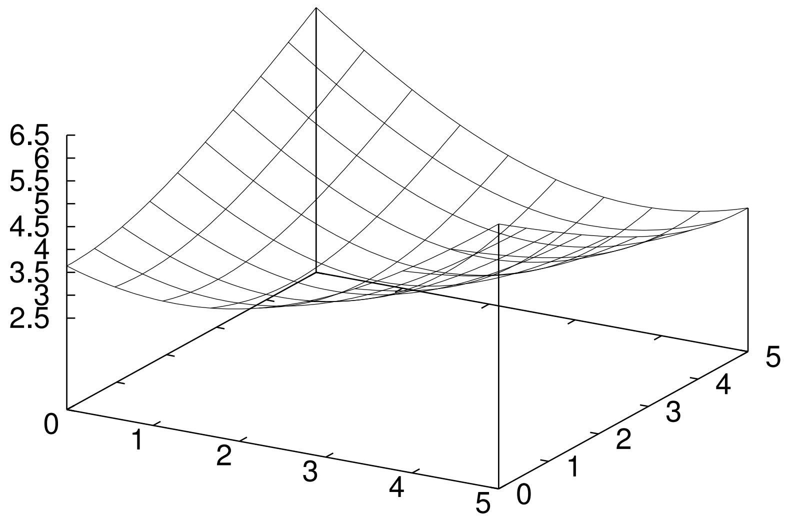

図 5: 例 4

4　確率モデル法の詳細

4.1　棋力の変化への追随

ここまでに述べた方法は、個人の棋力が一定であると見做した場合はうまくいくが、このままでは棋力の変化にうまく対応できない。これを解決するには、直近の対局と過去の対局で対局の重みを変化させ、新しい対局ほど重視するような重み付けを導入すればいいと思われる。

$$-\log P = \sum_{i=1}^{M} w_i \log(1 + \exp(-k(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i)))$$

のように重み w_i を導入する。対数を取っているので、例えば重みを 3 にすることは、ちょうど同じ結果の対局が 3 局打たれたことに相当する。最近の対局は $w_i = 1$ とし、古くなったものは徐々に小さくすることが考えられる。

KGS では、45 日で重みが半分になり、180 日で重みが 0 になるという重み付けを行っているらしい。しかし、対局数が多くなるとレートが変化しにくくなるという声が多く聞かれるらしく、ここは調整が必要と思われる。また、一般に棋力が低いほど棋力の変化 (上昇) は大きいと思われるので、棋力の絶対値に応じて重み付けを変化させることも考えられる。

4.2　引き分け

本来は引き分けの確率をもモデル化すべきかも知れないが、ここでは簡略化のため、引き分けを 0.5 勝 0.5 敗と扱っている。

4.3　小路盤の確率モデル

近年は、特に入門者を中心に、13 路盤や 9 路盤といった小路盤が用いられることが多くなっている。これらの盤での対局を、レート計算に組み込むことを考える。

一般に、盤が小さいと段級の差の影響が小さく、相対的に置石の効力が大きくなり、13 路盤で 2 級差 1 子、9 路盤で 4 級差 1 子ということがよく言われる。盤の大きさが $19^2 : 13^2 : 9^2 \simeq 4 : 2 : 1$ であり、手数もそれに比例すると考えると、置石のハンデを詰めていく暇が無い分、2 倍、4 倍になっていると考えられる。

この考え方を用いると、

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-k(s(x_A - x_B) + h))}$$

のような確率モデルを採用することが考えられる。ただし、通常の 19 路盤で $s = 1$、13 路、9 路では例えばそれぞれ $s = 0.5$、$s = 0.25$ とする。

なお、k の値も多少変化することが考えられる。直観的には 19 路に比べてやや小さくなるような気がするが、これは検討課題である。

4.4　段級位の信頼度

対局数が少なかったり、極端な手合い違い (実力と置石が合っていない) 対局しか行っていないプレイヤーの場合、計算された段級位の信頼性はあまり高くないと考えられる。信頼度は、プレイヤーのレートの関数である確率 $-\log P$ の、最適点における形状と関係がある。すなわち、あるプレイヤーのレートが「正にその数値で無ければならない」ならば、そのプレイヤーのレート値を動かすと確率関数は大きく増加する、すなわち最適点が「深い谷」になっていると考えられる。

n 人のプレイヤーのレートを x_i とし、最小化する関数を $f(x_1, \cdots, x_n)$ と書く。また、全員のレートをベクトルでまとめたものを $X = (x_1, \cdots, x_n)$ と書く。

$$f(X) = f(x_1, \cdots, x_n) = -\log P = \sum_{i=1}^{M} \log(1 + \exp(-k(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i)))$$

ここで、f がある点 X' で最小値を取るならば、その点の周囲で、f は次のように近似出来る。

$$f(X) \simeq f(X') + \frac{1}{2}(X - X')^t f''(X')(X - X') \equiv \overline{f}(X)$$

ここで、$f''(X')$ は点 X' における f の Hessian であり、

$$f''(X') = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X') & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(X') \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X') & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X') \end{pmatrix}$$

のような (対称) 行列で表される。

ここで、あるプレイヤー i のレート値 x_i を 1 だけ動かしたときの f の増加分は、e_i を i 番目の成分が 1、残りが 0 の単位ベクトルとして、

$$\Delta f = \overline{f}(X' + e_i) - \overline{f}(X') = \frac{1}{2} e_i^t f''(X') e_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X')$$

となり、Hessian の対角成分を見ればよいことが分かる。この値が大きいほど「谷が深く」、そのプレイヤーのレートの信頼度が大きいと言える。なお、KGS でも同様に目的関数の二回微分を信頼度としているようである。

二回微分の値を具体的に項別に計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\log(1+\exp(-k(x-y+h)))) &= -\frac{k\exp(-k(x-y+h))}{1+\exp(-k(x-y+h))} \\
\frac{\partial}{\partial y}(\log(1+\exp(-k(x-y+h)))) &= \frac{k\exp(-k(x-y+h))}{1+\exp(-k(x-y+h))} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log(1+\exp(-k(x-y+h)))) &= \frac{k^2\exp(-k(x-y+h))}{(1+\exp(-k(x-y+h)))^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\log(1+\exp(-k(x-y+h)))) &= \frac{k^2\exp(-k(x-y+h))}{(1+\exp(-k(x-y+h)))^2}
\end{aligned}$$

となる。すなわち、ある二人 (レート x と y) が対局したときの信頼度の増加分は、(レートの変動分を無視したとして) どちらも同じ

$$\frac{1}{2}\frac{k^2\exp(-k(x-y+h))}{(1+\exp(-k(x-y+h)))^2}$$

であることが分かる。この値は、互角の手合い、すなわち $x-y+h=0$ のときに最大値 $\frac{k^2}{8}$ を取り、互角から離れるにつれて減少する。

ここで、k 値によるスケールの違いを吸収するため、

$$\frac{8}{k^2}\Delta f = \frac{4}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(-\log P)$$

を信頼度と定義する。

$$\text{信頼度 } 1 = \text{互角の手合いで } 1 \text{ 局打った程度の信頼度}$$

という具合である。

関数

$$\frac{4\exp(-kx)}{(1+\exp(-kx))^2}$$

の概形を図 6 に示す ($k=0.8$)。

4.5 段級位の信頼度の問題点

例えば、A 氏 (=アンカー)、B 氏、C 氏について、

- A 氏と B 氏は互先で 1 勝 1 敗
- B 氏と C 氏は互先で 100 勝 100 敗
- A 氏と C 氏は対局無し
- B 氏と C 氏は他に対局を行っていない

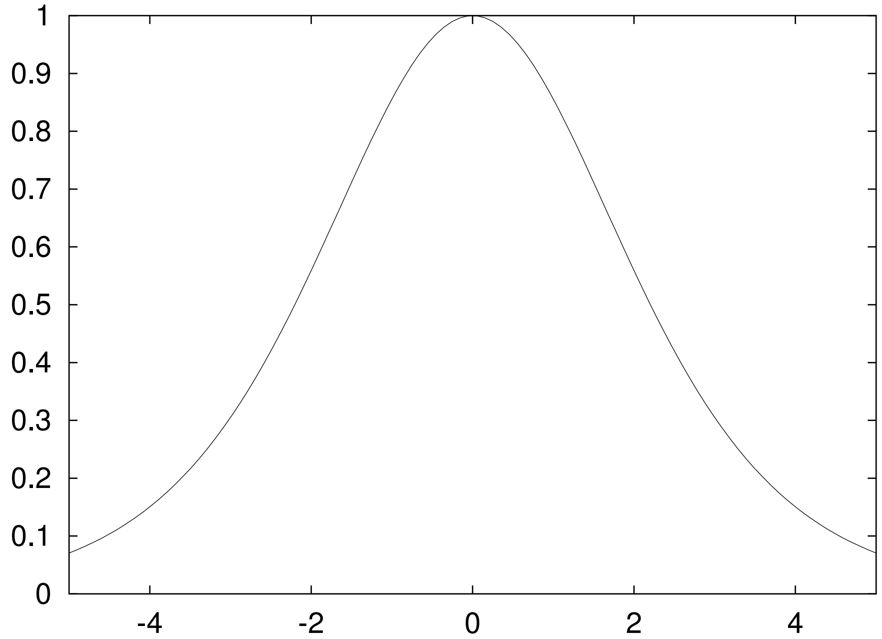

図 6: 信頼度の概形

という状況を考えよう。このとき、「B 氏と C 氏はほぼ互角」であると言えるが、閉じた世界を作っており、外部との比較の材料は A 氏との 1 勝 1 敗だけである。この場合、B 氏と C 氏の段級位の信頼度は非常に低いはずであるが、今の計算方法では多数の対局があるため信頼度は高く計算されてしまう。

目的関数の増加に対応して考えれば、例えば最適点の値に対して B 氏の計算値だけ動かすと目的関数は大きく増加するので、一見 B 氏の計算値は信頼度が高いように見えるが、「B 氏と C 氏の値を同時に」動かせば、目的関数の増加は非常に小さく両者の計算値の信頼度が低いことが分かる。図 7 にその様子を示す。中央が最適点で、楕円は目的関数の等高線を表す。中央から真横に移動すると関数値は急激に増加するが、斜めに移動すれば関数値の増加は小さい。すなわち、x_i に関する二回微分の値だけ見ていても、「真の谷の深さ」は分からないということになる。

これを解決するには、次のように信頼度を計算することが考えられる。プレイヤー i の信頼度を計算するのに、目的関数の変数 x_i に関する断面を単純に考えるのではなく、$x = X - X'$、$H = f''(X')$ として、

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}x^t Hx \\ \text{subject to} & e_i x = 1 \end{array}$$

のような最小化問題の最小値で考えればよい。すなわち、上で言う「B 氏と C 氏の値を同時に」動かすことを許容していることに相当する。ラグランジュ乗数 λ を導入してこの問題の最適点を求める。

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^t Hx - \lambda(e_i x - 1) = 0$$

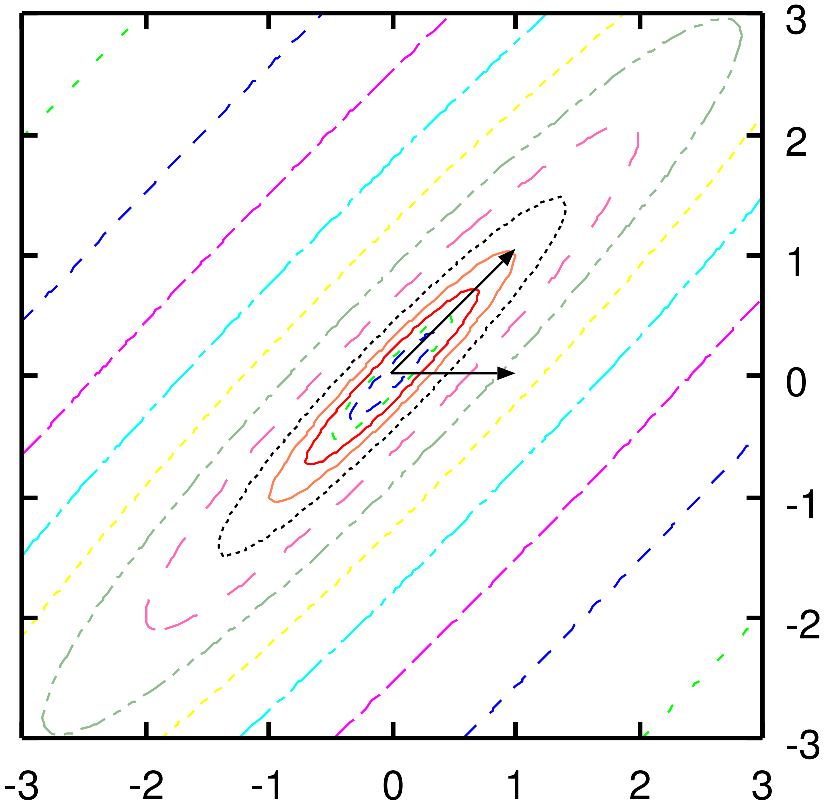

図 7: 目的関数の最小化の様子と信頼度

微分して 0 と置く。

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= Hx - \lambda e_i = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} &= e_i x - 1 = 0\end{aligned}$$

これを解くと、

$$x = \frac{H^{-1}e_i}{e_i^t H^{-1} e_i}, \quad \lambda = \frac{1}{e_i^t H^{-1} e_i}$$

となる。x を代入して最小値を求めると、

$$\frac{1}{2}x^t H x = \frac{1}{2}\frac{1}{e_i^t H^{-1} e_i}$$

となる。すなわち、「Hessian の対角成分」を信頼度とする代わりに、「Hessian の逆行列の対角成分の逆数」を信頼度とすれば、上記の問題を解決できることになる。

以下、簡単な例を示す。A, B, C の 3 氏が次のような対局を行ったとする。

A 氏 vs 1d のアンカー	10 勝 10 敗
B 氏 vs 1d のアンカー	1 勝 1 敗
B 氏 vs C 氏	10 勝 10 敗

この場合、推定レートは全員 1d となる。そして、A 氏が 1d であることの信頼度は高く、B 氏は低い。C 氏はその B 氏とほぼ互角であることが分かるだけだから、やはり信頼度は低い、というのが直感的な信頼度であろう。

しかし、単に二回微分を用いる方法だと、この場合全ての対局が互角の手合いなので、単純に「信頼度 = 対局数」となり、A, B, C それぞれの信頼度は $20, 22, 20$ となってしまう。実際、この場合における目的関数の Hessian を計算すると、($\frac{4}{k^2}$ を乗じて正規化して)

$$H = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{pmatrix}$$

となる。対角成分が信頼度である。

そこで、Hessian の逆行列を計算してみると、

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.55 \end{pmatrix}$$

となり、対角成分の逆数を考えると、次のようになる。

	A	B	C
Hessian の対角成分による信頼度	20	22	20
Hessian の逆行列の対角成分の逆数による信頼度	20	2	$1.818\cdots$

これによると、逆行列の対角成分の逆数を用いれば、きちんと直観によく合った信頼度が計算できていることが確認できる。

4.6 逆行列の対角成分の逆数の計算

前節で述べたように、信頼度は Hessian の対角成分でなく、Hessian の逆行列の対角成分の逆数で計算されるべきである。しかし、Hesssian はプレイヤーの人数を大きさとする巨大行列であり、その逆行列を計算することは容易では無い。

そこで、

(まだ書いてない。)

4.7 定数 k について

前述したように、確率モデル中の定数 k は、棋力差あるいは置石の差が勝率に与える影響の大きさを表している。KGS では経験的に $k = 0.8$ を採用している。

$k = 0.8$ を具体的に数字に直すと、例えば棋力差がある 2 者が互先で対局した場合の上手の勝率が、

段級位の差	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
勝率	50%	60%	69%	77%	83%	88%	92%

となるということであり、あるいは棋力互角の 2 者が置碁で対局した場合の黒の勝率が、

手合い	コミ 6	コミ無し	コミ -6	2 子	2 子コミ -6	3 子	3 子コミ -6
勝率	50%	60%	69%	77%	83%	88%	92%

となるということである。

これはアマチュアレベルでは程良い近似になっていると感じるが、恐らくプロや高段者に対しては $k = 0.8$ よりも大きい値を採用する必要がある。例えば、棋力互角のプロ同士の 2 子局の黒の勝率は、恐らく 77%より上では無いかと思われる。

なお、k の値は棋力の値の分散の度合を示すもので、本質的には意味の無い、単なるスケーリングの問題である。よって、チェスなどにこの手法を適用する場合はある意味「何でもよい」と言える。しかし、囲碁の場合は段級位差と置石数の整合性を取る必要があるため、k 値は慎重に決定する必要がある。

5 計算例

大規模な計算を行った例を挙げる。

iGo 棋院ネットワーク (`http://igo.cc/`) において、2004 年 1 月 ~12 月に打たれた全ての局の勝敗データを元に、参加者の棋力推定を行ってみた。全対局数は 168297 局で、そのうち 19 路でないもの、無効なものを除くと、127809 局。

その 127809 局での対局者は、全部で 10965 人であるが、私 (`kashi`) をアンカーとして、計算に組み入れることの出来る (すなわちアンカーに間接的にでも勝ったことも負けたこともある) プレイヤーは 5323 人おり、その 5323 人同士の対局 (すなわち計算の対象となる対局) は、115782 局。

アンカー `kashi` は、1d のアンカーと 10 勝 10 敗だったという仮想的な対局データを付け加える。また、引き分けは 0.5 勝 0.5 敗と扱った。

その 5323 人の棋力を未知数とし、115867 項の和で構成される目的関数の最適化を行った。(対局数よりやや多いのは、引き分けを 0.5 勝 0.5 敗と扱っているのと、アンカーとの仮想対局のためである。)

アルゴリズムは、Polak-Ribiere の共役勾配法を使用した。初期値を全員 1d、目的関数の許容誤差を 8.03×10^{-11} とした場合の計算時間は、Pentium4 3GHz で 1103 秒、収束するまでの反復回数は 1332 回だった。

なお、許容誤差は、目的関数のおおよその大きさが、

$$\log 2 \times \text{対局数}$$

と推定できるので、それに 10^{-15} を掛けたものとした。

なお、この計算結果は、その対局場の多くの常連から、「自分が感じているのとほぼ同じ感覚で数値化されている」と高評価を受けた。棋力の分布を 0.1k 刻みのヒストグラムで表したものを図 8 に示す。

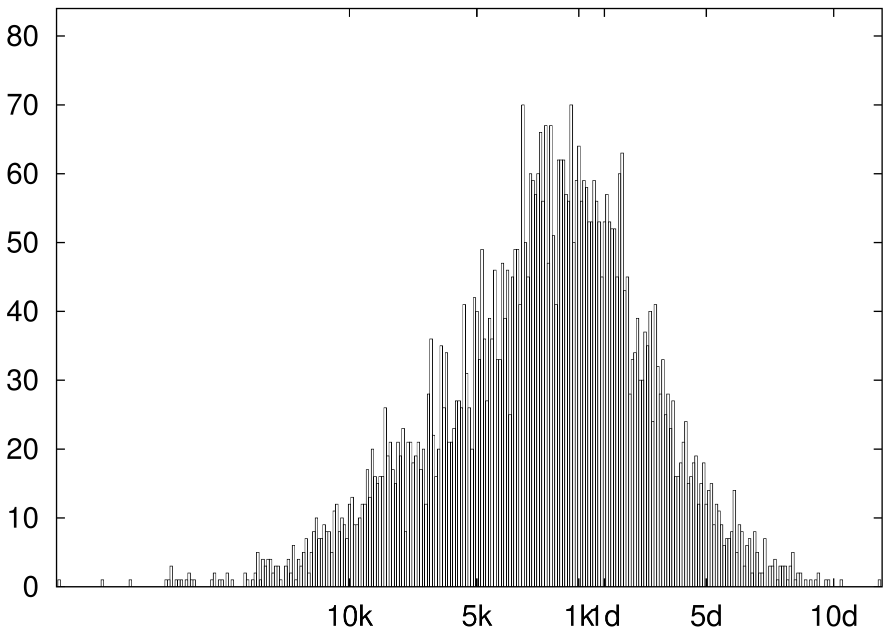

図 8: 棋力の分布

他にもいくつかの例について計算したので、規模と計算時間をまとめておく。

人数	対局数	反復回数	計算時間 (秒)
3146	58214	969	404
5323	115782	1332	1103
12313	213234	2267	3737

計算精度の問題もかなり厳しく、規模の大きさはこのあたりで限界に近い。

6 k 値の推定

前述のように、パラメータ k の決め方は囲碁においては重要である。十分多くの置碁を含んだ対局のデータがあれば、それを元に (その集団に最もふさわしい) k の値を推定することが出来る。原理は簡単で、k の値も未知数として最適化問題を解けば良い。

5 節のデータでは残念ながら計算が安定せず、うまく推定することは出来なかった。

同様にして、例えば将棋やチェスにおける先手の有利さを、h を未知数として最適化を行うことによって推定することができる。

7 確率モデル法の簡略化と点数制

7.1 確率モデル法の簡略化

確率モデル法は極めて精度が高く、初期段級位の問題も無く、手合い違い対局も自然に取り扱えると優れた点が多い。しかし、それと引き替えに莫大な計算時間を要すると言う問題点がある。そこで、この方法を近似して簡略化し、いわゆる点数制に相当するレーティング決定法を導くことを考える。

すでに確率モデル法でレートが計算されている状態で、新たに一局が打たれた場合を考える。このとき厳密には、その対局を行った二者だけでなく、レーティングに参加している全てのメンバーのレートが変動する。しかし、当然大きく動くのはその二者のレートなので、残りのメンバーの変動は無視して二者のレートがどのくらい変動するかを考えてみる。

今、棋力 (=持ち点)x_0 の人と y_0 の人がハンデ h で対局し、x_0 の方が勝ったとする。ここで、双方の信頼度をそれぞれ a, b とする。

ここで、目的関数 $-\log P$ について、x の関数と考えると、x_0 で最小化されており

$$\frac{4}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-\log P) = a$$

なので、

$$-\log P \simeq P_0 + \frac{k^2}{8}a(x-x_0)^2$$

と近似できる。これに新しい対局による項を付け加えて、

$$-\log P \simeq P_0 + \frac{k^2}{8}a(x-x_0)^2 + \log(1+\exp(-k(x-y_0+h)))$$

を最小化する x を求めることを考える。まだ解きにくいので、付け加えた項を更に x_0 を中心とした 2 次の Taylor 展開で置き換える。

$$\begin{aligned}
-\log P \simeq\ & P_0 + \frac{k^2}{8}a(x-x_0)^2 + \log(1+\exp(-k(x_0-y_0+h))) \\
& + \frac{-k\exp(-k(x_0-y_0+h))}{1+\exp(-k(x_0-y_0+h))}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{k^2\exp(-k(x_0-y_0+h))}{(1+\exp(-k(x_0-y_0+h)))^2}(x-x_0)^2
\end{aligned}$$

これを最小化する x は、

$$x = x_0 + \left(a + \frac{4\exp(-k(x_0-y_0+h))}{(1+\exp(-k(x_0-y_0+h)))^2}\right)^{-1}\frac{4}{k}\frac{\exp(-k(x_0-y_0+h))}{1+\exp(-k(x_0-y_0+h))}$$

で与えられる。同様に計算すると、y は

$$y = y_0 - \left(b + \frac{4\exp(-k(x_0-y_0+h))}{(1+\exp(-k(x_0-y_0+h)))^2}\right)^{-1}\frac{4}{k}\frac{\exp(-k(x_0-y_0+h))}{1+\exp(-k(x_0-y_0+h))}$$

となる。

$()^{-1}$ の中はちょうど更新後の信頼度に一致している。以上により、次のようなシステムが考えられる。一人のデータは (棋力, 信頼度) の組で表現し、(x_0, a_0) の人が (y_0, b_0) の人にハンデ h で勝った場合、

$$p = \exp(-k(x_0 - y_0 + h))$$

として、

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{4p}{(1+p)^2} \\ b &= b_0 + \frac{4p}{(1+p)^2} \\ x &= x_0 + \frac{4}{ka}\frac{p}{1+p} \\ y &= y_0 - \frac{4}{kb}\frac{p}{1+p} \end{aligned}$$

のように更新する。

新参の参加者について、棋力がまだ安定しないため点数の変動を通常より大きくすることがよく行われるが、信頼度はほぼ対局数に相当するため、それが自然に表現できていることが分かる。

7.2 信頼度の制限

この方法だと信頼度は単調に増加し、点数の修正は信頼度の逆数が係数となっているので、多数の対局を重ねると点数の変化が小さくなってしまう。全対局を元に棋力を推定しているのでこれは当然であるが、棋力の変化を考えるとこれでは都合が悪い。

そこで、信頼度は上限を設けることを考える。例えば N 局手合い違いでない対局を行った場合、得られる信頼度は N であるから、

$$a = \max(a_0 + \frac{4p}{(1+p)^2}, N)$$

のようにすることが考えられる。これは、大雑把に言えば直近の N 局で棋力を推定することに相当する。

あるいは、定期的に信頼度にある定数を掛けて値を減らして行くことも考えられる。これは、最近打たれた対局を重視して棋力を推定することに相当する。例えば KGS 風に 45 日を半減期とするならば、毎日 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{45}} \simeq 0.985$ を信頼度 a に掛ける、といった具合である。

信頼度を定数にしてしまえば、よく行われているレーティングに近くなる。

7.3 新規参加者のレート決定

点数制の大きな問題点として、新規参加者のレート決定の問題が挙げられるが、それを自然な形で導いてみよう。

最初は点数未定のまま数局打ち、勝ちと負けが両方揃った時点で計算することにする。

今、m 人の人 (棋力 y_i) に勝ち、n 人の人 (棋力 z_i) に負けたとしよう。このとき、目的関数は、

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1 + \exp(-k(x - y_i + h_i))) + \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-k(z_i - x - h_i)))$$

となる。これを最小化すればよいが、このままでは解きづらいので、それぞれの式を $y_i - h_i$、$z_i - h_i$ を中心として 2 次までの Taylor 展開で近似する。

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\left(\log 2 - \frac{k}{2}(x - y_i + h_i) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{4}(x - y_i + h_i)^2\right) \\ +\ &\sum_{i=1}^{m}\left(\log 2 + \frac{k}{2}(x - z_i + h_i) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{4}(x - z_i + h_i)^2\right) \end{aligned}$$

これを最小化するには、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}(x - y_i + h_i)\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}(x - z_i + h_i)\right) = 0$$

を満たせばよく、解くと、

$$x = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - h_i) + \sum_{i=1}^{m}(z_i - h_i) + \frac{2}{k}(n - m)\right)$$

となる。結局、

$$\text{初期点数} = ((\text{相手の棋力} - \text{ハンデ})\ \text{の平均}) + \frac{2}{k}\frac{\text{勝ち数} - \text{負け数}}{\text{対局数}}$$

ということになる。

初期信頼度は、今得られた x を用いて、

$$a = \sum_{i=1}^{n}\frac{4\exp(-k(x - y_i + h_i))}{(1 + \exp(-k(x - y_i + h_i)))^2} + \sum_{i=1}^{m}\frac{4\exp(-k(x - z_i + h_i))}{(1 + \exp(-k(x - z_i + h_i)))^2}$$

でよい。

7.4 よく使われているレーティング式との比較

チェスの世界では、Arpad E. Elo によって提唱され、1960 年に USCF (United Stats Chess Foundation) で採用された Elo システムがレーティングシステムとして広く認知されている。USCF の計算式を以下に示す。

初期参加者のレートを決めるには、次の式に従う。

$$R_p = R_c + 400\frac{W - L}{N}$$

ここで、R_c は対局相手の平均レート、N は対局数、W、L はそれぞれ勝ち、負けの数である。

レートの更新は次の式に従う。

$$R_n = R_0 + K(W - W_e)$$

ここで、R_0 は元のレート、K は定数、W は対局結果 (勝ちなら 1、負けなら 0)、W_e は期待勝率で、

$$W_e = \frac{1}{1 + 10^{-\frac{d_r}{400}}}$$

である。

定数 K は主催者によって適宜定められるが、USCF では上位者は 16、中間は 24、下位者は 32 のようにしていた。一般に $16 \sim 32$ の値が取られることが多い。

$$
\begin{aligned}
p &= \exp(-k(x_0 - y_0 + h)) \\
x &= x_0 + \frac{4}{ka}\frac{p}{1+p} \\
y &= y_0 - \frac{4}{kb}\frac{p}{1+p}
\end{aligned}
$$

の更新式において、

$$
\begin{aligned}
h &= 0 \\
k &= \frac{\log 10}{400} \\
x_0 - y_0 &= d_r
\end{aligned}
$$

と置くと、

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{1600}{a \log 10}(1 - \frac{1}{1 + 10^{-\frac{d_r}{400}}}) \\
y &= y_0 + \frac{1600}{b \log 10}(- \frac{1}{1 + 10^{-\frac{-d_r}{400}}})
\end{aligned}
$$

となる。すなわち、信頼度を定数にしてしまえば USCF の式となる。例えば、

$$
a = \frac{1600}{32 \log 10} \simeq 21.7
$$

ならば $K = 32$ の場合に一致し、

$$
a = \frac{1600}{16 \log 10} \simeq 43.4
$$

ならば $K = 16$ に一致する。

初期段級位については、

$$
k = \frac{\log 10}{400}
$$

とすると

$$
初期点数 = ((相手の棋力 - ハンデ)\text{ の平均}) + \frac{800}{\log 10}\frac{勝ち数 - 負け数}{対局数}
$$

となりほとんど同じ形となるが、

$$
\frac{800}{\log 10} \simeq 347
$$

であり 400 とは一致しない。この 400 になんらかの理論的根拠があるかは不明である。

このように、確率モデルの最適化から導かれた更新式は、従来の方法を特殊な場合として含んでいることが分かる。

また、

$$
\frac{1}{1 + 10^{-\frac{d_r}{400}}} \simeq \frac{1}{2} + \frac{d_r}{800}
$$

と強引に近似してしまえば (図 9 参照)、$K = 32$ で、

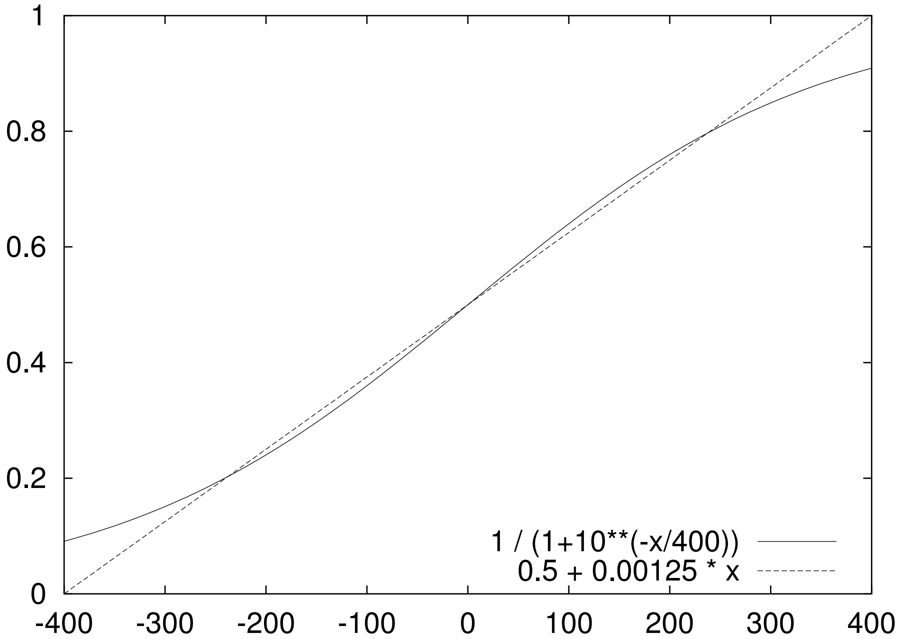

図 9: 強引な近似

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + (16 - 0.04 d_r) \\
y &= y_0 - (16 - 0.04 d_r)
\end{aligned}
$$

が得られる。これは、将棋倶楽部 24 (`http://www.shogidojo.com/`) で用いられている更新式である。

また、TAISEN (`http://taisen.mycom.co.jp/taisen/`) の囲碁で用いられている計算式は、

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + (12 - 0.03 d_r) \\
y &= y_0 - (12 - 0.03 d_r)
\end{aligned}
$$

であり、これは Elo 式を同様に強引に近似した式で $K = 24$ とした場合に相当する。なお、TAISEN では置碁でレート差を埋めて対局することができ、レート差と置石の換算表を見ると、150 点差 1 子となっている。すなわち、本稿の立場である 1 点差 1 子と 150 倍のスケールの差があり、換算すると k 値としては

$$
k = \frac{\log 10}{400} \times 150 \simeq 0.863
$$

に相当する値となっていることが分かる。

8　確率モデル法の簡略化 2

8.1　導出

本節では、確率モデル法の別の近似を考える。すなわち、

$$-\log P = \sum_{i=1}^{M} \log(1+\exp(-k(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i)))$$

において、

$$\log(1+\exp(-x)) \simeq \log 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

のように 2 次の Taylor 展開で近似し、これを最小化することを考える。すなわち、

$$-\log P \simeq \sum_{i=1}^{M} \left(\log 2 - \frac{k}{2}(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i) + \frac{k^2}{8}(x_{a_i} - x_{b_i} + h_i)^2 \right) \equiv Q$$

微分してこれの極小点を考える。

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \sum_{j \in A_i} \left(-\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}(x_i - x_{b_j} + h_j) \right) + \sum_{j \in B_i} \left(\frac{k}{2} - \frac{k^2}{4}(x_{a_j} - x_i + h_j) \right)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_i &= \{j \mid a_j = i\} \\ B_i &= \{j \mid b_j = i\} \end{aligned}$$

である。要するに、A_i は i 氏が勝った対局の集合、B_i は i 氏が負けた対局の集合である。この値を 0 として x_i について解くと、

$$x_i = \frac{1}{N_i} \left(\frac{2}{k}(W_i - L_i) + \sum_{j \in A_i}(x_{b_j} - h_j) + \sum_{j \in B_i}(x_{a_j} + h_j) \right)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} W_i &= |A_i| \quad (i \text{ 氏の勝ち数}) \\ L_i &= |B_i| \quad (i \text{ 氏の負け数}) \\ N_i &= W_i + L_i \end{aligned}$$

である。h_j は勝者側から見たものであり、これを i 氏から見たものとすれば、7.3 で導いた新規参加者のレート決定の式と同じ形であることが分かる。

これを全ての x_i について考えると、プレイヤーの数を次元とする線形方程式となっていることが分かる。実際の計算については後述する。

この手法は、近似しない本物の確率モデル法に対して、その反復の初期値を得るための前処理として用いることもできる。

8.2 複雑なモデルの場合

複雑で見通しが悪くなるので前の節では書かなかったが、確率モデルとして

$$-\log P = \sum_{i=1}^{M} w_i \log(1+\exp(-k(s_i(x_{a_i}-x_{b_i})+h_i)))$$

のように対局の重み w_i と盤の大きさに関する重み s_i をを導入した場合の計算式を、結果だけ記しておく。

$$x_i = \frac{1}{N_i}\left(\frac{2}{k}(W_i - L_i) + \sum_{j\in A_i} w_j s_j (s_j x_{b_j} - h_j) + \sum_{j \in B_i} w_j s_j (s_j x_{a_j} + h_j)\right)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} W_i &= \sum_{j\in A_i} w_j s_j \\ L_i &= \sum_{j\in B_i} w_j s_j \\ N_i &= \sum_{j\in A_i} w_j s_j^2 + \sum_{j\in B_i} w_j s_j^2 \end{aligned}$$

である。

8.3 計算例

5 節で挙げた例題について、この手法での計算を行ってみた。

線形方程式だが 5323 次元であり、Gauss の消去法等の直接法で解くのは難しい。ここでも、共役勾配法を使って計算した。計算時間は 9 秒。なお、全ての式を N_i 倍すると対称行列となり計算量を減らせるが、要素の絶対値の大きさが不揃いになり却って収束しないという結果になった。

5 節の計算結果との差を 0.1k 刻みのヒストグラムで表したものを図 10 に示す。

この誤差を見ると、少なくともこの例題に関する限り、この簡略化法の結果をそのまま使うのはやや問題があると言えるかも知れない。

8.4 悪あがき

この簡略化はアルゴリズムとしては非常にすっきりしているが、前節の結果をみる限り結果はあまり芳しくないと言える。これは、近似

$$\log(1+\exp(-x)) \simeq \log 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

が大雑把なのが原因と考えられる。ここを 3 次、4 次、$\cdots$、と上げていけば当然精度はよくなると予想されるが、連立方程式は容易に解けなくなり、元の式を直接最適化するのと変わらなくなってしまう。

そこで、2 次式のまま、係数を調整することでより精度を高めることを考える。Taylor 展開は展開の中心付近での精度は高いが、そこから離れると精度が落ちてしまうため、そこに注目する。

$$-\log P = \sum_{i=1}^{M} \log(1+\exp(-x))$$

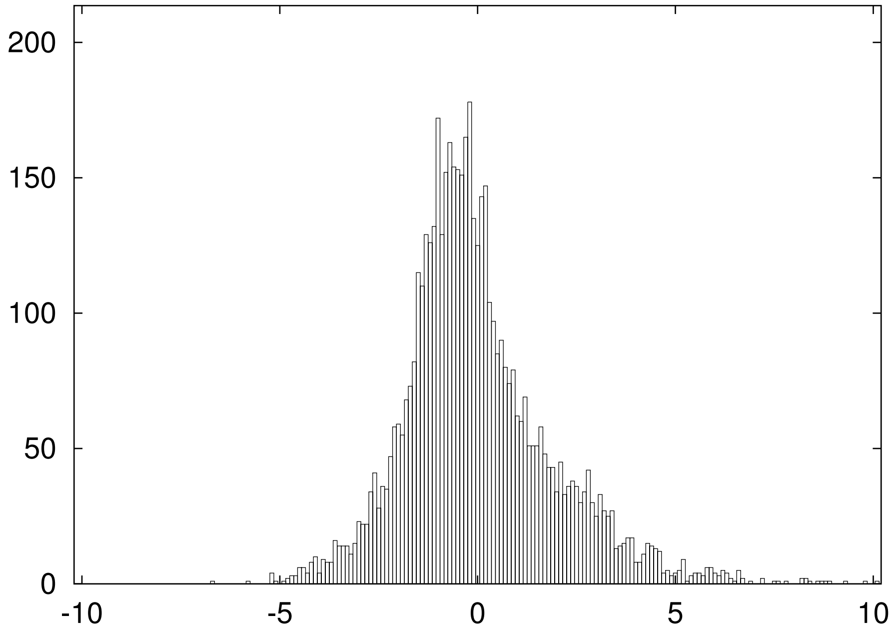

図 10: 簡略化の誤差

の全体を 2 次式で近似するのは難しいが、例えば勝率が 1% ∼ 99% の間で最良近似することを考えると、$|x| \leq 4.595$ の間で数値的に計算し、

$$0.769928 - 0.5x + 0.0787621x^2$$

となった。この様子を図 11 に示す。

これを見ると単なる Taylor 展開と比べてかなりよく近似できていることが分かる。これを使って前節の計算を行うと、その誤差は図 12 のようになる。

これを見ると、明らかに改善されていることが分かる。前節の場合は標準偏差が 1.87 程度だったのに対して、1.13 程度まで減少している。

そこで、どの値を使った場合に最適となるかをこの例題について調べてみる。近似する範囲を変えて同様に近似式を求めた表を以下に示す:

10% ∼ 90%	$\lvert x\rvert \leq 2.197$	$0.701051 - 0.5x + 0.107611x^2$
1% ∼ 99%	$\lvert x\rvert \leq 4.595$	$0.769928 - 0.5x + 0.0787621x^2$
0.1% ∼ 99.9%	$\lvert x\rvert \leq 6.907$	$0.898613 - 0.5x + 0.0593778x^2$
0.01% ∼ 99.99%	$\lvert x\rvert \leq 9.21$	$1.06209 - 0.5x + 0.0468706x^2$
0.001% ∼ 99.999%	$\lvert x\rvert \leq 11.513$	$1.24457 - 0.5x + 0.0384564x^2$
0.0001% ∼ 99.9999%	$\lvert x\rvert \leq 13.816$	$1.43793 - 0.5x + 0.0325034x^2$

最適化問題に定数項は意味が無いので、x^2 の項の係数を $\frac{1}{8} = 0.125$ から適当に変えてやるだけで、修正された近似式での計算が行える。

そこで、x^2 の係数を 0.03 ∼ 0.125 と変化させ、標準偏差がどのように変わるかを調べた。結果を図 13 のようになる。

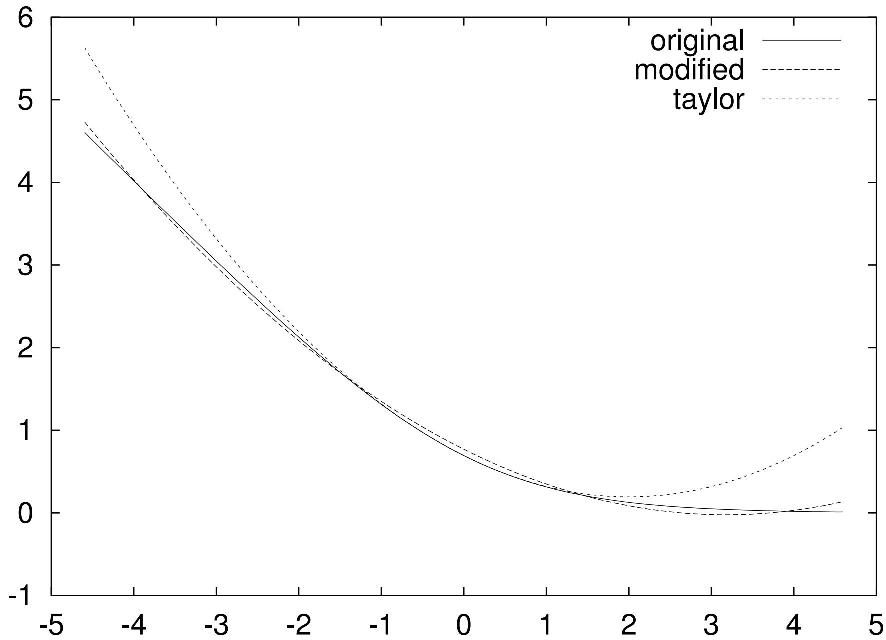

図 11: 近似式の修正

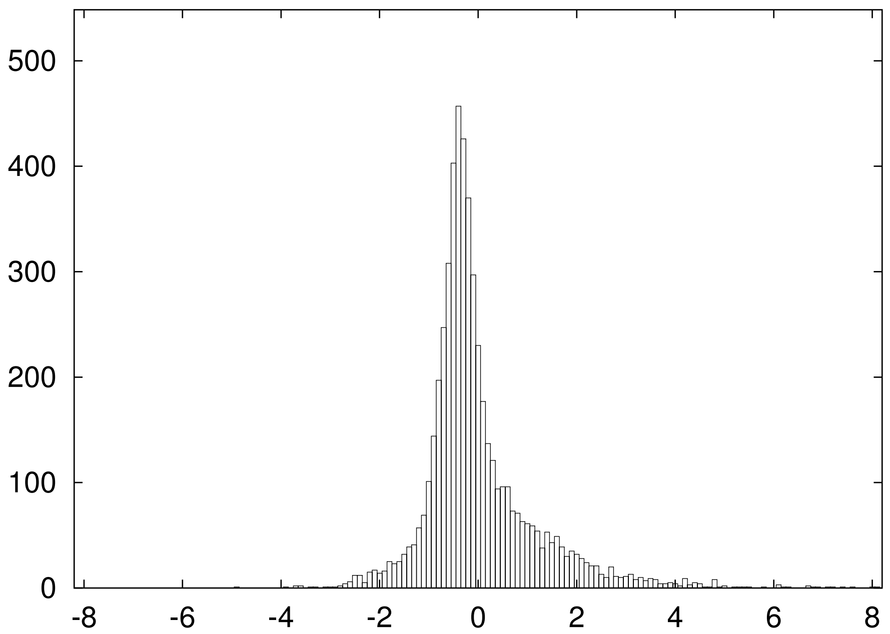

図 12: 簡略化の誤差 (修正版)

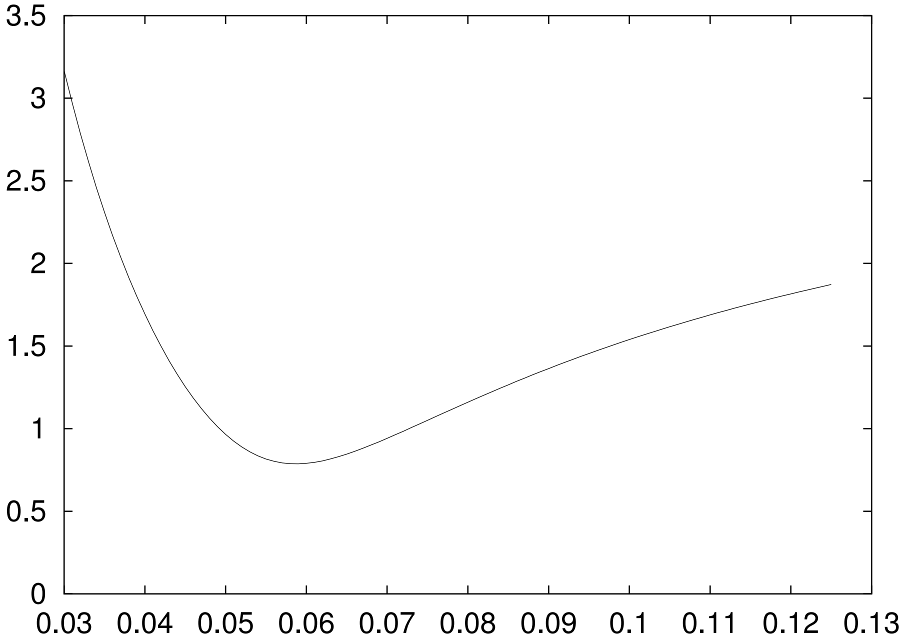

図 13: x^2 の係数と標準偏差

これを見ると、0.059 付近で標準偏差は最小となり、その値は 0.787 程度である。つまり平均的に 0.8K 程度の誤差であり、これなら実用的に使えるレベルであると考えられる。

なお、この修正を行うには、式中の

$$\frac{2}{k}$$

の部分を

$$\frac{2}{k}\frac{0.125}{0.059} = \frac{1}{4k \times 0.059}$$

のようにすればよい。

9 簡略化のシミュレーションによる精度評価

ここまで多数の簡略化法を導いて来たが、それぞれの棋力推定能力を数値実験により比較する。すなわち、複数のプレイヤーに内部的に棋力を設定し、乱数によって対局の組合せを決め、確率モデルに従って勝敗を決定する。その勝敗の情報だけを用いて (内部に設定した棋力は用いないで) 棋力の推定を行い内部に設定した棋力と比較すれば、棋力推定の能力を評価することができる。

具体的には、以下のような状況を設定した。

棋力のスケールは、チェスの習慣に合わせて

$$k = \frac{\log 10}{400}$$

で表すことにした。プレーヤー数は 1000 人で、それぞれに「内部」棋力を、平均 1500、標準偏差 400 で乱数により設定した。100 点刻みのヒストグラムで表したものを図 14 に示す。

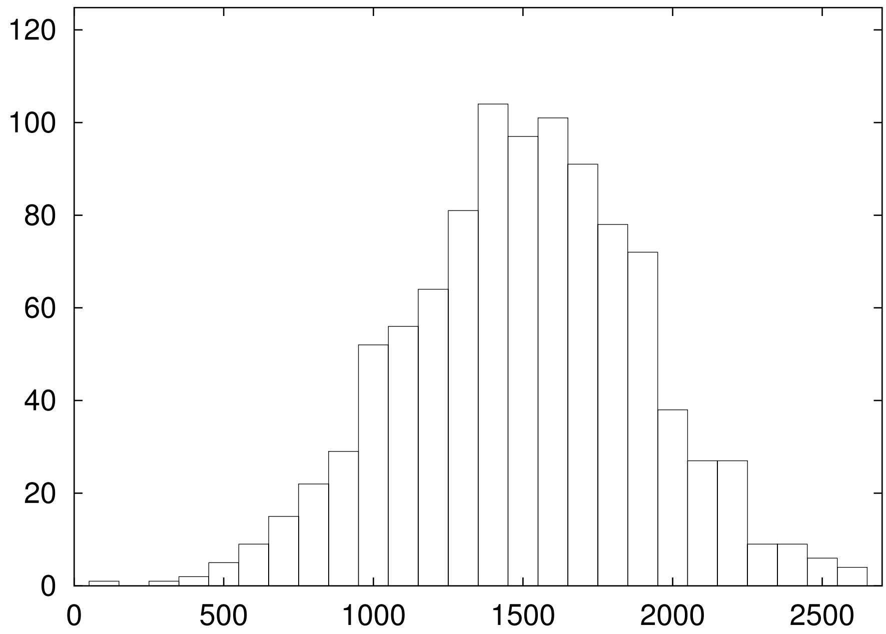

図 14: 設定した棋力の分布

また、これら 1000 人のプレイヤーに対して、一日 500 局 (すなわち一人当たり一日一局) の対局を乱数で選び、その勝敗を内部で設定した棋力を用いて

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-k(x_A - x_B))}$$

の確率に従って乱数で決定する。これを 24ヵ月に渡って実行し、そこで得られた勝敗表を元に棋力の推定を行う。これを内部に設定した棋力と比較すれば、推定能力が分かる。

次の 5 種類の棋力推定法の比較を行った。

(1) 確率モデル法 確率モデルから導かれる最適化問題を直接解く方法。アンカーとして 1000 人のうちの一人を選び、その内部棋力を設定した。

(2)Elo レーティング (線形) レート x_0 の人が y_0 の人に勝った場合、$d_r = x_0 - y_0$ として、

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (16 - 0.04 d_r) \\ y &= y_0 - (16 - 0.04 d_r) \end{aligned}$$

に基づいて更新。ただし、400 点差以上の対局になった場合はこの式の適用範囲外になるため、その結果は無視している。

(3)Elo レーティング (非線形) レート x_0 の人が y_0 の人に勝った場合、$d_r = x_0 - y_0$ として、

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 32 * (1 - \frac{1}{1 + 10^{-\frac{d_r}{400}}}) \\ y &= y_0 - 32 * (1 - \frac{1}{1 + 10^{-\frac{d_r}{400}}}) \end{aligned}$$

で更新。

(4) 確率モデルから導いたポイント制 7.1 節で導いた、(x_0, a_0) の人が (y_0, b_0) の人に勝った場合、

$$p = \exp(-k(x_0 - y_0))$$

として、

$$\begin{aligned}
a &= a_0 + \frac{4p}{(1+p)^2} \\
b &= b_0 + \frac{4p}{(1+p)^2} \\
x &= x_0 + \frac{4}{ka}\frac{p}{1+p} \\
y &= y_0 - \frac{4}{kb}\frac{p}{1+p}
\end{aligned}$$

のように更新する方法。初期値は、$(1500, 5)$ と設定した。ただし、信頼度を制限するため一日一回信頼度に

$$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{45}} \simeq 0.985$$

を乗じている。また、信頼度は 5 を下回らないようにした。

(5) 確率モデル法の線形化 8.1 節で導いた、最適化問題を線形化した方法。アンカーとして 1000 人のうちの一人を選び、その内部棋力を設定した。

(6) 確率モデル法の線形化 (修正版) (5) と同じだが、x^2 の係数を $0.125 \to 0.059$ と修正したもの。

ただし、(2), (3), (4) の方法について、初期状態として全員のレートを 1500 に設定した。

以上の 5 種類の方法を用いて、勝敗結果に基づいて棋力推定を行わせ、各プレイヤーのレートを 24ヵ月間に渡って観察した。各方法について、ばらつき具合の指標として、内部に設定した棋力との差を取り、その値の標準偏差を考えることにした。この変化をグラフにしたものを、図 15 に示す。

これを見ると、(1) の方法の収束の速さが際だっていることが分かる。24ヵ月経過時には、真の棋力との差は平均 22 程度に達している。(3) や (4) が 2 年かけて到達した誤差 50 には、4ヵ月ほどで到達している。

(2), (3), (4) は似たような傾向だが、(2) はやはり近似が激しいためか収束が遅く、誤差も大きいことが分かる。(4) は (3) に比べれば精度がよく、特に初期段階での収束に差が出ている。これは、最初の頃は信頼度が低く、レートの修正幅が大きいためであると思われる。

(5) は、これをみる限りあまり芳しい結果は出ていない。

(6) の修正を加えると、初期段階では (1) と遜色無い素早い収束を示すが、誤差 70 程度で止まってしまい、あまり高精度な近似は出来ないことが分かる。

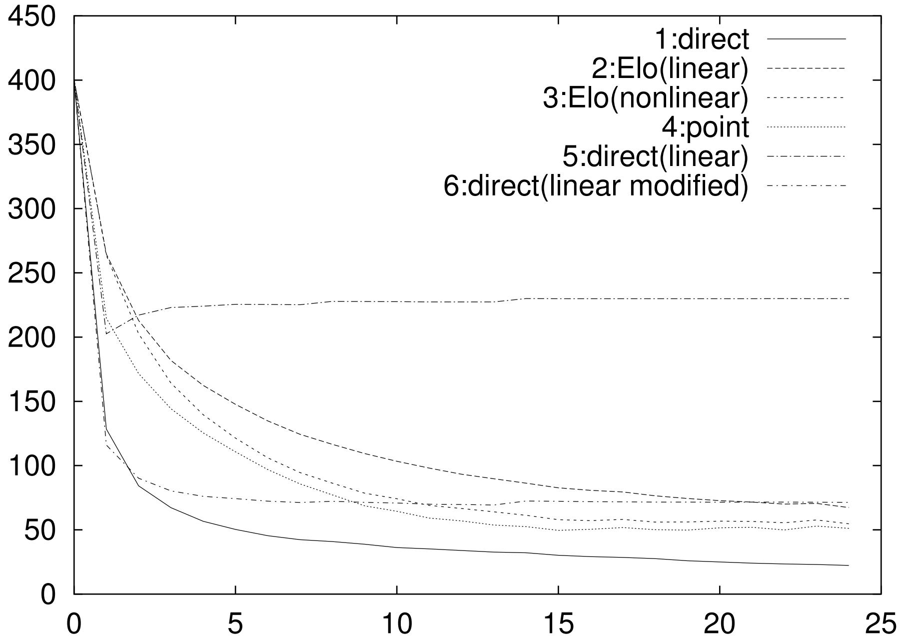

図 15: 棋力推定値の標準偏差